Fonctions euleriennes
($\Gamma(z)$, $B(p,q)$, $\psi(z)$)

But : définir une fonction $f(z)$ qui coïncide avec $z!$ pour $z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et étudier ces propriétés.

Déf. 1 Soit $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$. On définit la fonction $\Gamma(z)$ comme

(1)
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

Remarque 2. Convergence de l'intégrale (1) lorsque $t \to \infty$ est garantie par le facteur e^{-t}. De même, la convergence en $t = 0$ est assurée par la condition $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\int t^{z-1}\, dt \sim \frac{t^z}{z} \quad (\to 0 \text{ lorsque } t \to 0)$$

Propriétés :

1). Formule de récurrence :

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

▼ Par définition, pour $\operatorname{Re} z > -1$:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z+1-1}\, dt = -\int_0^\infty t^z\, d(e^{-t}) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{lorsqu'on demande} \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \underbrace{\cancel{-t^z e^{-t} \Big|_0^\infty}}_{0} + \int_0^\infty e^{-t} \cdot z\, t^{z-1}\, dt =$$

$$= z \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = z\,\Gamma(z) \quad ▼$$

2). Relation avec la factorielle :

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

▼ La formule est vraie pour $n = 0$, car

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1 = 0!$$

Supposons qu'elle est vraie pour $n = k$, c'est-à-dire,

$\Gamma(k+1) = k!$

Alors

$$\Gamma((k+1)+1) = \left| \begin{array}{c} \text{d'après la formule} \\ \text{de récurrence} \end{array} \right| = (k+1)\,\Gamma(k+1) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{d'après} \\ \text{l'hypothèse} \end{array} \right| = (k+1)\cdot k! =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{d'après la définition} \\ \text{de factorielle} \end{array} \right| = (k+1)!$$

Donc, par induction, $\Gamma(n+1) = n!$ ▼

3). Prolongement analytique

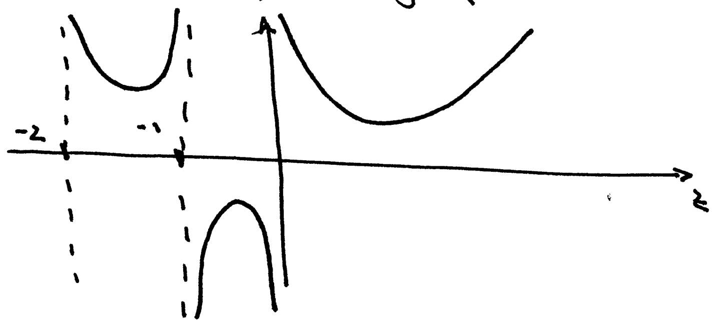
- initialement, $\Gamma(z)$ est définie pour $\mathrm{Re}\, z > 0$
- on peut maintenant utiliser la relation $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ pour construire le prolongement analytique de $\Gamma(z)$ dans le plan complexe entier
- par exemple

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \leftarrow \text{ définie pour } \mathrm{Re}\, z > -1 \text{ sauf } z = 0 \text{ (pôle)}$$

$$= \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad \leftarrow \text{ définie pour } \mathrm{Re}\, z > -2 \text{ sauf } z = -1, 0$$

$$= \text{-----} \qquad \text{-----}$$

- on voit donc que $\Gamma(z)$ est une fonction méromorphe de z, avec des pôles simples en $z = 0, -1, -2, \ldots$
- pour $z \in \mathbb{R}$, le graphe de $\Gamma(z)$ est:



4). Relation avec la fonction ζ de Riemann.

<u>Déf. 3.</u> La fonction $\zeta(s)$ est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour $\mathrm{Re}\, s > 1$ et est ensuite obtenue pour d'autres s par prolongement analytique.

Notons que

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx}\, dx = \left| \begin{matrix} nx = y \\ dx = \frac{dy}{n} \end{matrix} \right| = n^{-s} \int_0^\infty y^{s-1} e^{-y} dy =$$

$$= n^{-s}\, \Gamma(s).$$

Donc

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty x^{s-1} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right)}_{= e^{-x}/(1-e^{-x})} dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

ce qui permet d'écrire

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx$$

<u>Conjecture de Riemann</u>: Les zéros nontriviaux de $\zeta(s)$ se situent sur la droite $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. (les zéros "triviaux" sont $s = -2, -4, -6, \ldots$ et ils correspondent, dans un sens, aux pôles de $\Gamma(s)$).

10^6 \$

5). Propriétés asymptotiques

$$\Gamma(z \to \infty) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

formule de Stirling

6). Formule de réflexion d'Euler :

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \Longrightarrow \quad \text{en particulier, } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

▼ Idée de la démonstration :

$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples en $z \in \mathbb{Z}$:

$z = 0, -1, -2, \ldots$ ← les pôles de $\Gamma(z)$

$z = 1, 2, 3, \ldots$ ← les pôles de $\Gamma(1-z)$

De plus

$$\Gamma(-n+z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z(z-1)\ldots(z-n)} \overset{z\to 0}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{z(-1)(-2)\ldots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!} z^{-1}$$

d'où

$$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \operatorname*{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=-n} \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = (-1)^n$$

$$n \in \mathbb{Z}_{>0} : \operatorname*{res}_{z=n} \Gamma(1-z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(-1) \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=n} \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = (-1)^n$$

et donc $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname*{res}_{z=n} \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = (-1)^n.$$

La fonction $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ est aussi méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en $z \in \mathbb{Z}$. Les mêmes résidus :

$$\operatorname*{res}_{z=n} \frac{\pi}{\sin \pi z} = \left.\frac{\pi}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=n} = \frac{\pi}{\pi \cos \pi n} = (-1)^n$$

Donc $f(z) = \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z}$ est une fonction <u>analytique</u> sur $\mathbb{C}$. Si on arrive à montrer qu'elle de plus bornée, alors $f(z) = \text{const}$ (d'après le théorème de Liouville). De plus, lorsque $|z| \to \infty$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $f(z) \to 0$, donc const $= 0$ et $f(z) = 0$ ▼

+). Formule de multiplication :

$$\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\;\Gamma(2z)$$

▼ Même idée que pour la formule de réflexion
- le membre de gauche et de droite sont des fonctions méromorphes, avec des pôles simples en $z = 0, -1/2, -1, -3/2, \dots$
- en utilisant la formule $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, on peut montrer que les résidus des deux fonctions coïncident.
- il reste à montrer que
$$\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2) - 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$
est bornée et $\to 0$ lorsque $|z| \to \infty$ et ensuite appliquer le théorème de Liouville ▼

<u>Déf. 4</u> La fonction $B(p,q)$ est définie par

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.$$

$(\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0)$

<u>Propriétés :</u>

1). $B(p,q) = B(q,p)$ (symétrie)

▼ $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \left|\begin{array}{l} dt = -ds \\ t = 1-s \\ 1-t = s \end{array}\right| =$

$$= \int_0^1 (1-s)^{p-1} s^{q-1}\,ds = B(q,p)$$ ▼

2). $$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

▼ $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \left|\begin{array}{l} \sin^2\theta = t \\ \cos^2\theta = 1-t \\ dt = 2\sin\theta\cos\theta \end{array}\right| =$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2(p-1)}(\cos\theta)^{2(q-1)}\cdot\sin\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,d\theta.$$ ▼

3). Relation à $\Gamma(z)$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

▼ $\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1}\,dt \int_0^\infty e^{-s} s^{q-1}\,ds =$

$$= \left| \begin{array}{ll} t = x^2, & dt = 2x\,dx \\ s = y^2, & ds = 2y\,dy \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot 2x^{2p-1}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} \cdot 2y^{2q-1}\,dy =$$

$$= \iint_{D=\{(x,y)\,|\,x>0,\,y>0\}} e^{-x^2-y^2} \cdot 4\, x^{2p-1}\, y^{2q-1}\,dx\,dy =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & y = r\sin\varphi \\ r \in [0,\infty), & \varphi \in [0,\pi/2] \\ dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\varphi\, e^{-r^2} \cdot 4\, r^{2p-1+2q-1} (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1} \cdot r$$

$$= 2\int_0^\infty dr\, e^{-r^2} \cdot r^{2(p+q)-2} \cdot r \cdot \underbrace{2\int_0^{\pi/2} d\varphi\, (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1}}_{\substack{\shortparallel \\ B(q,p) = B(p,q)}} =$$

$$= B(p,q) \cdot \int_0^\infty e^{-r^2}\, r^{2(p+q-1)} \cdot 2r\,dr =$$

$$= \left| \begin{array}{l} r^2 = u \\ 2r\,dr = du \end{array} \right| = B(p,q) \underbrace{\int_0^\infty e^{-u}\, u^{p+q-1}\,du}_{\substack{\shortparallel \\ \Gamma(p+q)}} =$$

$$= B(p,q)\,\Gamma(p+q) \quad ▼$$

__Déf. 5__ La fonction $\psi(z)$ est définie par

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$$

Les propriétés de $\psi(z)$ découlent de celles de $\Gamma(z)$.
Par exemple:

1). $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

$\Downarrow$

$\ln\Gamma(z+1) = \ln z + \ln\Gamma(z)$ | appliquons la dérivée

$\Downarrow$

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

$\Downarrow$

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)$$

2). $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z}$

$\Downarrow$

$\ln\Gamma(z) + \ln\Gamma(1-z) = \ln\pi - \ln\sin\pi z$ | appliquons la dérivée

$\Downarrow$

$$\psi(z) - \psi(1-z) = -(\ln\sin\pi z)' = -\frac{1}{\sin\pi z}\cdot\pi\cos\pi z =$$

$$= -\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z.$$

etc.

Notons que

$$\underbrace{\psi(n+1) - \psi(1)}_{\ln n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$\gamma = \psi(1) = 0{,}577\ldots \leftarrow$ la constante d'Euler